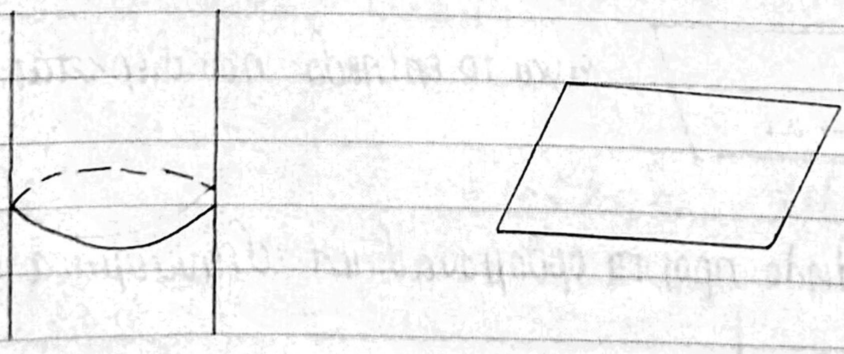
Μάθημα 14ο 25/11/16

Τοπικά ισομετρικές επιφάνειες

1)



2) Αλυσοειδής επιφάνεια

$S: x^2+y^2=a^2\cosh^2\frac{z}{a} \quad , a>0$

Θεωρώ τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = x^2+y^2-a^2\cosh^2\frac{z}{a}$, Προφανώς $S \equiv f^{-1}(0)$

Αναζητώ τα κρίσιμα σημεία της f: $f_x = f_y = f_z \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \\ -a^2\cosh\frac{z}{a}\sinh\frac{z}{a}\cdot\frac{1}{a}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

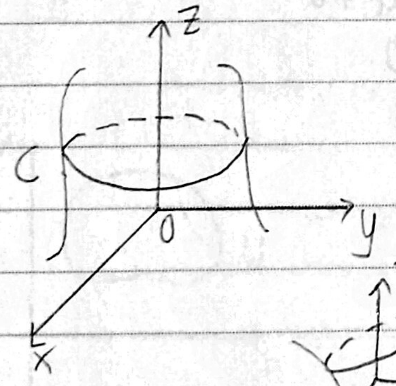
$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ $(0,0,0) \notin f^{-1}(0) \Rightarrow S = f^{-1}(0)$ είναι κανονική επιφάνεια

$$x^2+y^2 = a^2\cosh^2\frac{z}{a} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a\cosh\frac{z}{a}}\right)^2 + \left(\frac{y}{a\cosh\frac{z}{a}}\right)^2 = 1 \quad \left[\frac{x}{a\cosh\frac{z}{a}} = \cos u, \ \frac{y}{a\cosh\frac{z}{a}} = \sin u\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cosh\frac{z}{a}\cos u \\ y = a\cosh\frac{z}{a}\sin u \end{array}\right| \ \frac{z}{a} = v \ \left.\right\} \ \begin{array}{l} x = a\cosh v\cos u \\ y = a\cosh v\sin u \\ z = av \end{array}$$

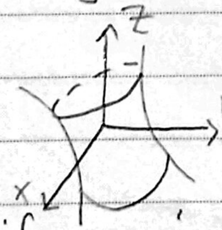
Θεωρώ την $X: (0,2\pi)\times\mathbb{R} \to S$

$X(u,v) = (a\cosh v\cos u, a\cosh v\sin u, av)$



$c(t) = (f(t), 0, g(t))$, $f(t) > 0$

$X(u,t) = (f(t)\cos u, f(t)\sin u, g(t))$



$$\left.\begin{array}{l} f(v) = a\cosh v \\ g(v) = av \end{array}\right\} \ c(v) = (a\cosh v, 0, av)$$

Πρώτη θεμελιώδη μορφή ως προς το σύστημα συντεταγμένων X

$E = \|X_u\|^2$, $F = \langle X_u, X_v\rangle$, $G = \|X_v\|^2$

$X_u = (-a\cosh v\sin u, a\cosh v\cos u, 0)$

$X_v = (a\sinh v\cos u, a\sinh v\sin u, a)$

$E = a^2\cosh^2 v$

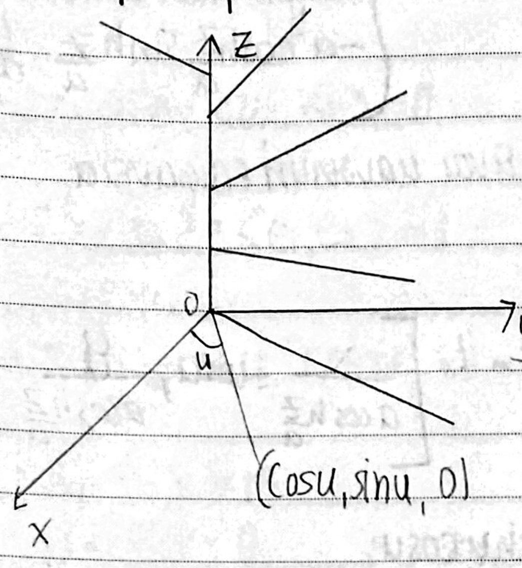
$F = 0$

$G = a^2 + a^2\sinh^2 v$

$G = a^2\cosh^2 v$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = a^2\cosh^2 v \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ελικοειδής επιφάνεια



$\tilde{v}(\cos\tilde{u}, \sin\tilde{u}, 0) + a(0,0,\tilde{u}) = (\tilde{v}\cos\tilde{u}, \tilde{v}\sin\tilde{u}, a\tilde{u})$

Θεωρώ την $X: (0,2\pi)\times\mathbb{R} \to \tilde{S}$

$$\tilde{X}(\tilde{u},\tilde{v}) = (\underbrace{\tilde{v}\cos\tilde{u}}_{x}, \underbrace{\tilde{v}\sin\tilde{u}}_{y}, \underbrace{a\tilde{u}}_{z})$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \tilde{v}\cos\tilde{u} \\ y = \tilde{v}\sin\tilde{u} \end{array}\right\} \Rightarrow x\sin u = y\cos u$$
$$z = a\tilde{u} \Rightarrow \tilde{u} = \frac{z}{a}$$
$$\tilde{S}: x\cdot\sin\frac{z}{a} = y\cos\frac{z}{a}$$

$\tilde{E} = \|X_{\tilde{u}}\|^2$, $\tilde{F} = \langle X_{\tilde{u}}, X_{\tilde{v}}\rangle$, $\tilde{G} = \|X_{\tilde{v}}\|^2$

$X_{\tilde{u}} = (-\tilde{v}\sin\tilde{u}, \tilde{v}\cos\tilde{u}, a)$
$X_{\tilde{v}} = (\cos\tilde{u}, \sin\tilde{u}, 0)$

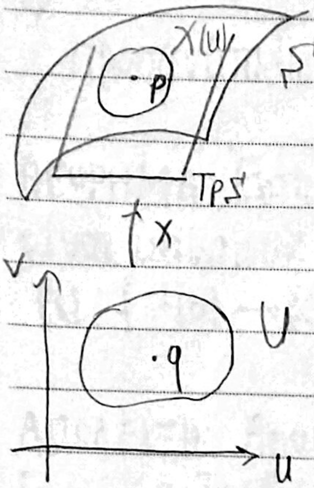
$\tilde{E} = a^2 + \tilde{v}^2$
$\tilde{F} = 0$
$\tilde{G} = 1$

Αν $\tilde{v} = a\sinh v$, $\tilde{u} = u$

Θεωρώ σύστημα συντεταγμένων Y της $\tilde{S}$
$Y(u,v) = (a\sinh v\cos u, a\sinh v\sin u, au)$

Τα θεμελιώδη ποσά της $\tilde{S}$ ως προς το Y είναι $\begin{pmatrix} a^2\cosh^2 v & 0 \\ 0 & a^2\cosh^2 v \end{pmatrix}$

Συμπέρασμα: Η αλυσοειδής και η ελικοειδής είναι τοπικά ισομετρικές επιφάνειες.



$q = X^{-1}(p)$

$q=(u,v)$

Εστω $X: U \to S'$ σύστημα συντεταγμένων με $p \in X(U)$

$\{X_u(q), X_v(q)\}$ βάση του T_pS'

Άρα το $X_u \times X_v(q)$ είναι κάθετο στο T_pS'

Το διάνυσμα $\dfrac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(X^{-1}(p))$.

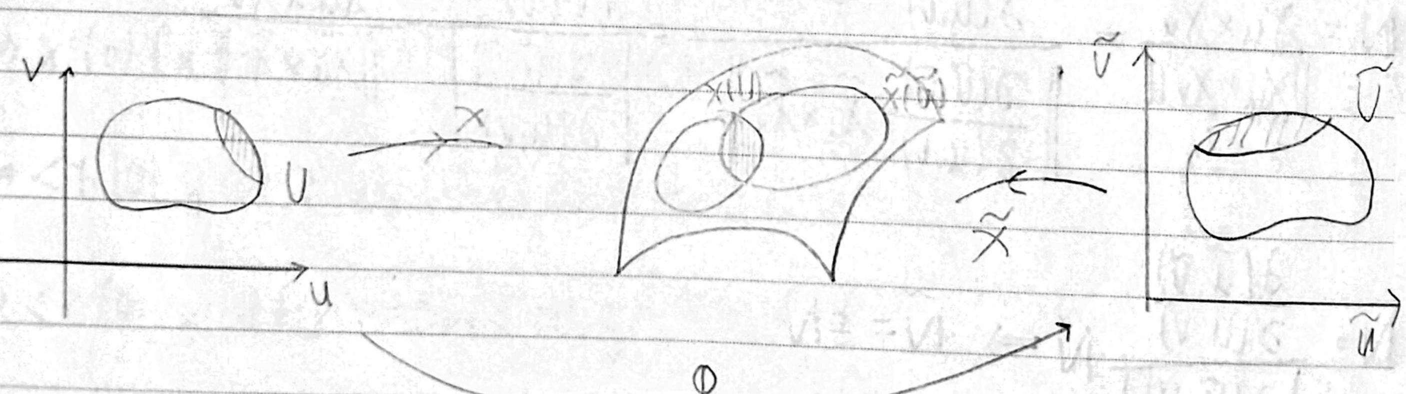
είναι μοναδιαίο και κάθετο στο T_pS'

Ορίζεται η απεικόνιση $N: X(U) \to \mathbb{R}^3$ με $N = \dfrac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ X^{-1}$ με $\|N(p)\| = 1$

και $N(p) \perp T_pS'$ $\forall p \in X(U)$

Εστω $\tilde{X}: \tilde{U} \to S'$ σύστημα συντεταγμένων με $X(U) \cap \tilde{X}(\tilde{U}) \neq \emptyset$

$N \circ \tilde{X} = \dfrac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ (X^{-1} \circ \tilde{X})$ λεία απεικόνιση



$N: X(U) \to \mathbb{R}^3$ $\quad N = \dfrac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ X^{-1}$

$\tilde{N}: \tilde{X}(\tilde{U}) \to \mathbb{R}^3$ $\quad \tilde{N} = \dfrac{\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}\|} \circ \tilde{X}^{-1}$

$X = \tilde{X} \circ (\tilde{X}^{-1} \circ X)$

$\Phi = \tilde{X}^{-1} \circ X$ λεία

$\Phi(u,v) = (\tilde{u}(u,v), \tilde{v}(u,v))$

$X(u,v) = \tilde{X}(\tilde{u}(u,v), \tilde{v}(u,v))$

$$\begin{cases} X_u = \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \tilde{X}_{\tilde{u}} + \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \tilde{X}_{\tilde{v}} \\ X_v = \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \tilde{X}_{\tilde{u}} + \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \tilde{X}_{\tilde{v}} \end{cases}$$

$$X_u \times X_v = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \tilde{X}_{\tilde{v}} \times \tilde{X}_{\tilde{u}}$$

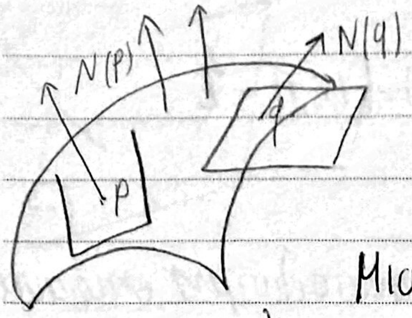
$$= \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \right) \tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}} \Rightarrow$$

$$X_u \times X_v = \frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)} \tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}$$

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)} \tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}}{\left\| \frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)} \tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}} \right\|} = \frac{\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}}{\left| \frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)} \right|} \frac{\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}\|}$$

$$N = \frac{\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}}{\left| \frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)} \right|} \tilde{N} \Rightarrow \tilde{N} = \pm N$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια επιφάνεια S καλείται προσανατολίσιμη <u>ανν</u> υπάρχει λεία απεικόνιση $N: S \to \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $\|N(p)\| = 1$ και $N(p) \perp T_pS$



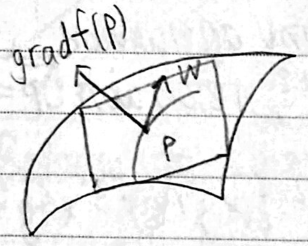
Ένα τέτοιο N καλείται μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο της S ή προσανατολίσιμη

Μια επιφάνεια S καλείται προσανατολισμένη $\Leftrightarrow$ είναι προσανατολίσιμη και έχουμε επιλέξει ένα προσανατολισμό.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ λεία με $a \in f(U)$. Τότε το σύνολο $f^{-1}(a)$ είναι κανονική με μοναδιαίο (προσανατολισμό).

$N: f^{-1}(a) \to \mathbb{R}^3$, $N = \dfrac{\text{grad} f}{\|\text{grad} f\|}$, $\text{grad} f = (f_x, f_y, f_z)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αρκεί ν.δ.ο. $N(P) \perp T_P S$ ή ισοδύναμα $\text{grad} f(P) \perp T_P S$.
Έστω $w \in T_P S$. Υπάρχει καμπύλη



$c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ με $c(0) = P$, $c'(0) = w$

$c(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in S \Rightarrow f(c(t)) = a \Rightarrow$

$f(x(t), y(t), z(t)) = a \quad \forall t \in I$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(f(x(t), y(t), z(t))\right) \to \quad \forall t \in I.$

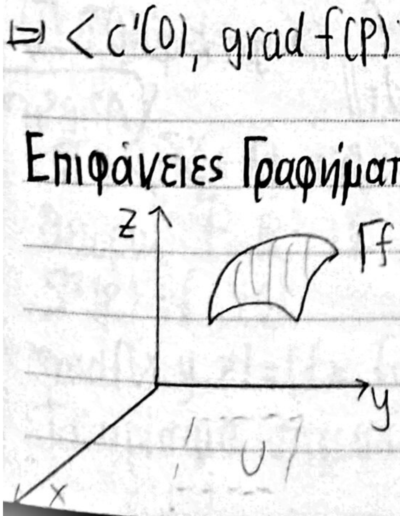
$\Rightarrow x'(t) f_x(x(t), y(t), z(t)) + y'(t) f_y(x(t), y(t), z(t)) + z'(t) f_z(x(t), y(t), z(t)) = 0$

$\Rightarrow x'(0) f_x(P) + y'(0) f_y(P) + z'(0) f_z(P) = 0$

$\Leftrightarrow \langle (x'(0), y'(0), z'(0)), (f_x(P), f_y(P), f_z(P)) \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle c'(0), \text{grad} f(P) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle w, \text{grad} f(P) \rangle = 0.$

Επιφάνειες Γραφήματα



$f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ λεία

$\Gamma f = \{(x, y, f(x,y)) \,/\, (x,y) \in U\}$

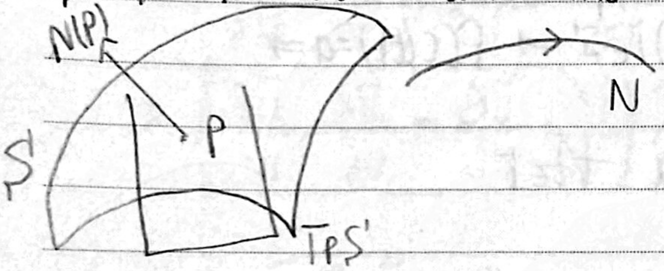
$z=f(x,y)$ $\quad \Gamma=g^{-1}(0)$, $g: U\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x,y,z)=f(x,y)-z$

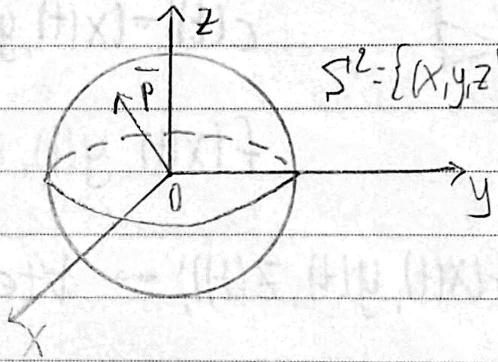
$$\left.\begin{aligned} g_x &= f_x \\ g_y &= f_y \\ g_z &= -1\neq 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{σημεία}]{\text{χωρίς κρίσιμα}} \Gamma_f = g^{-1}(0) \text{ είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια με } N$$

$$N(x,y,z)=\frac{\operatorname{grad} g(x,y,z)}{\|\operatorname{grad} g(x,y,z)\|}=\frac{(g_x,g_y,g_z)}{\|(\quad)\|}=\frac{(f_x,f_y,-1)}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}$$

Απεικόνιση Gauss (ή σφαιρική απεικόνιση)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με προσανατολισμό N. Καλούμε απεικόνιση Gauss (ή σφαιρική απεικόνιση) της S την απεικόνιση $N: S\to S^2$ η οποία αντιστοιχεί στο τυχόν $p\in S$ το σημείο $\bar{p}\in S^2$, τέτοιο ώστε $\vec{O\bar{p}}=N(p)$





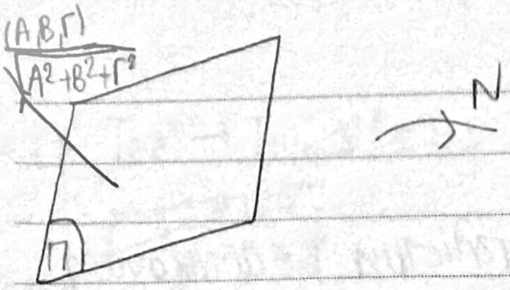
$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$

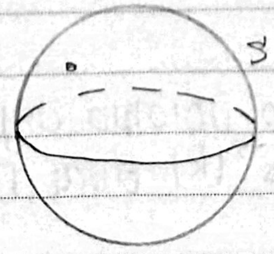
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1) Έστω $\Pi: Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$, $(A,B,\Gamma)\neq(0,0,0)$, $\Pi=f^{-1}(0)$, $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.
$f(x,y,z)=Ax+By+\Gamma z+\Delta$
$f_x=A$, $f_y=B$, $f_z=\Gamma$. Επειδή $(A,B,\Gamma)\neq(0,0,0)$ δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία. Άρα το $\Pi=f^{-1}(0)$ είναι επιφάνεια προσανατολίσιμη με προσανατολισμό $N:\Pi\to\mathbb{R}^3$, $N(x,y,z)=\dfrac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}(x,y,z)=\dfrac{(A,B,\Gamma)}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$

Άρα η αντίστοιχη απεικόνιση Gauss του Π είναι η: $N:\Pi\to S^2$,

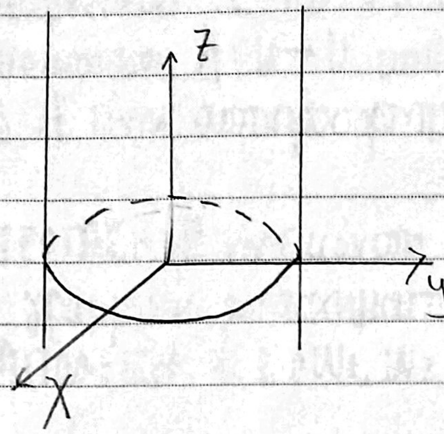
$$\Pi(x,y,z)=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}},\frac{B}{\sqrt{\quad}},\frac{\Gamma}{\sqrt{\quad}}\right)$$





Η εικόνα της απεικόνισης Gauss είναι το $\left\{\left(\frac{A}{\sqrt{\ }}, \frac{B}{\sqrt{\ }}, \frac{\Gamma}{\sqrt{\ }}\right)\right\}$

2) Κύλινδροι



$S^1: x^2+y^2=r^2$, $r>0$

Θεωρώ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^2+y^2-r^2$

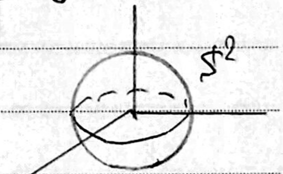
Προφανώς $S^1=f^{-1}(0)$

Βρίσκω τα κρίσιμα σημεία της f : $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \\ f_z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow$ το σύνολο των κρίσιμων σημείων είναι το $\{(0,0,z)/z\in\mathbb{R}\}$.

$(0,0,z)\notin f^{-1}(0) \Rightarrow S=f^{-1}(0)$ είναι προσανατολίσιμη με απεικόνιση Gauss

$N: S\to S^2$, $N(x,y,z)=\frac{\text{grad}f}{\|\text{grad}f\|}(x,y,z)=\frac{(2x,2y,0)}{2\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y,z)\in S^1$

$N(x,y,z)=\frac{1}{r}(x,y,0)$



Η εικόνα της απεικόνιση Gauss είναι ο κύκλος με εξίσωση $\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2=r^2 \end{cases}$

3) Σφαίρες

$S^2(R)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x^2+y^2+z^2=R^2\}$

Θεωρώ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$

$S^2(R)=f^{-1}(0)$

$\text{grad}f(x,y,z)=(f_x,f_y,f_z)=(2x,2y,2z)$

Τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία (x,y,z) με $\text{grad}f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow$

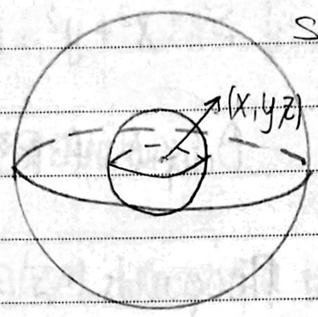
$\Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$

Το $(0,0,0)$ είναι το μόνο κρίσιμο σημείο της

$(0,0,0) \in f^{-1}(0) \Rightarrow$ Η $S^2(R)$ είναι προσανατολίσιμη με απεικόνιση Gauss $N: S^2(R) \longrightarrow S^2$,

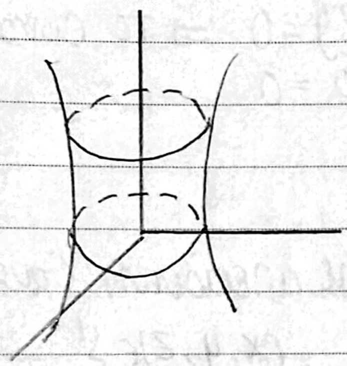
$$N(x,y,z) = \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}(x,y,z) = \frac{(2x, 2y, 2z)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad (x,y,z) \in S^2(R)$$

$$N(x,y,z) = \frac{1}{r}(x,y,z)$$



Η N είναι 1-1 και επί

4) $S: \ x^2+y^2-z^2=1$



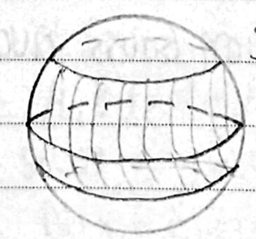
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-1$

$S = f^{-1}(0)$

$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$

$$N: S \to S^2, \ N(x,y,z) = \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}(x,y,z) = \frac{(2x, 2y, -2z)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$N(x,y,z) = \frac{(x,y,-z)}{\sqrt{2z^2+1}}$$



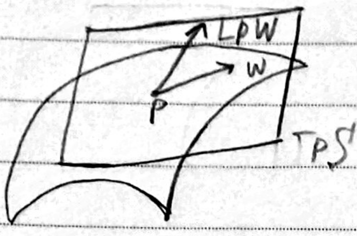
$n(z) = \frac{-z}{\sqrt{2z^2+1}}$

$-\frac{1}{\sqrt{2}} < z < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Απεικόνιση Weingarten ή τελεστής σχήματος κανονικής επιφάνειας

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N: S \to S^2$. Καλούμε απεικόνιση **Weingarten** της S στο f (ή τελεστή σχήματος) την απεικόνιση $L_P := -dN_P$

$L_p : T_pS \to T_{N(p)}S^2 \equiv T_pS$



Παρένθεση: Έστω V δ.χ. με εσωτερικό γινόμενο $\langle\, ,\, \rangle$. Μια γραμμική απεικόνιση $A: V \to V$ καλείται αυτοπροσαρτημένος ανν $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$
Ο A είναι αυτοπροσαρτημένος $\Leftrightarrow$ ο πίνακας ~~είναι~~ ως προς ορθομοναδιαία βάση είναι συμμετρικός

ΠΡΟΤΑΣΗ: Η απεικόνιση Weingarten $L_p : T_pS \to T_pS$ είναι αυτοπροσαρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός του T_pS ως προς $\langle\, ,\, \rangle_p$.
ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\langle L_p W_1, W_2 \rangle = \langle W_1, L_p W_2 \rangle \; (*)$, $\forall W_1, W_2 \in T_pS$

Θεωρώ σύστημα συντεταγμένων $X: U \to S$ με $p \in X(U)$.
$\{ X_u(X^{-1}(p)), X_v(X^{-1}(p)) \}$ βάση του T_pS

Λόγω δι-γραμμικότητας η $(*)$ είναι ισοδύναμη με την $\langle L_p X_u, X_v \rangle = \langle X_u, L_p X_v \rangle$